

गणित (2022) द्वितीय प्रश्न-पत्र

इकाई-I

प्रश्न 1. (a) दर्शाइये कि एक चक्रीय समूह के स्वाकारिताओं का समूह आबेली होता है।

(b) यदि $a \in G$, जहाँ G एक समूह है, तब G का वर्ग समीकरण ज्ञात कीजिए।

(c) संरचना प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

इकाई-II

प्रश्न 2. (a) माना R एक यूक्लिडीय वलय है तथा $a, b \in R$ । यदि $b \neq 0$, R में एक इकाई है, तब दर्शाइये कि $d(ab) = d(a)$ ।

(b) यदि R एक अद्वितीय गुणनखण्ड प्रान्त हो, तो सिद्ध कीजिए कि $R[x]$ भी एक अद्वितीय गुणनखण्ड प्रान्त है।

(c) मॉड्यूल के समाकारिता पर मूल प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

इकाई-III

प्रश्न 3. (a) सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर सभी बहुपदों का समुच्चय एक सदिश समष्टि होता है।

(b) सदिश समष्टि के लिए विस्तार प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(c) यदि W_1 तथा W_2 किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

इकाई-IV

प्रश्न 4. (a) प्रतिचित्रण $f: V_2(R) \rightarrow V_2(R)$, जो $f(x, y) = (x^3, y^3)$ द्वारा परिभाषित है, की रेखकता की जाँच कीजिए।

(b) यदि f तथा g किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ पर दो द्वि-एकघाती समघात हों, तो सिद्ध कीजिए कि $f+g$ भी $V(F)$ पर एक द्वि-एकघाती समघात है।

(c) निम्न द्विघाती समघात को विहित रूप में समानयन कर उसकी जाँच, सूचकांक एवं अचान्दका ज्ञात कीजिए—

$$q = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 8x_2x_3 - 4x_3x_1 + 12x_1x_2.$$

इकाई-V

प्रश्न 5. (a) यदि α, β एक आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ के सदिश हैं, सिद्ध कीजिए कि— $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ ।

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ में शून्येत्तर सदिशों का लाम्बिक समुच्चय रेखकतः स्वतंत्र होता है।

(c) $V_4(R)$ के निम्न एकघाततः स्वतंत्र समुच्चय S का अभिलाम्बिकीकरण कीजिए—

$$S = \{(1, 0, 1, 1), (-1, 0, -1, 1), (0, -1, 1, 1)\}.$$