

गणित (2022) प्रथम प्रश्न-पत्र

इकाई-I

प्रश्न 1. (a) सिद्ध कि— $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

(b) आबिल परीक्षण का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(c) फलन $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$ की फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए तथा दर्शाइये कि—

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

इकाई-II

प्रश्न 2. (a) डार्वू प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(b) यदि फलन $f: [a, b] \rightarrow R$ एकदिष्ट है, तो सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल $[a, b]$ में रिमान समाकलनीय है।

(c) समाकल $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए, जबकि a शून्य से बड़ा है।

इकाई-III

प्रश्न 3. (a) यदि $f(z), z$ का एक विश्लेषिक फलन है, सिद्ध कीजिए कि—

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |Rf(z)|^2 = 2 |f'(z)|^2.$$

(b) प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $\alpha > -1$ है।

(c) समाकल $\int_0^1 x^{n-1} \log x dx$ के लिए अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

इकाई-IV

प्रश्न 4. (a) दर्शाइए कि $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, R$ पर एक दूरीक है।

(b) सिद्ध कीजिए कि, किसी दूरीक समष्टि में परिमित संख्या में विवृत्त समुच्चयों का सर्वनिष्ठ विवृत्त होता है।

(c) सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

इकाई-V

प्रश्न 5. (a) सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि प्रथम गणनीय है।

(b) विस्तार प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(c) सिद्ध कीजिए कि एक सम्पूर्ण तथा परिबद्ध दूरीक समष्टि गणनीय सघन होता है।