AE-1275

B.Sc. (Part - III)
Term End Examination, 2016-17

MATHEMATICS

Paper - I

Analysis

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : **सभी** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer **all** questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है, किंतु $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ दोनों (0, 0) पर विद्यमान है।

If $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, then prove that $f(x, y)$ is not differentiable at (0, 0) but $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ both exist at (0, 0).

(*b*) स्वार्ज प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
State and prove Schwartz Theorem.

अथवा / OR

2. (*a*) $f(x)$ का फोरियर रूपांतरण ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1; |x| < a \\ 0; |x| > a \end{Bmatrix}$$

Find the Fourier transform of $f(x)$:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1; |x| < a \\ 0; |x| > a \end{Bmatrix}$$

(*b*) दर्शाइए कि e^{-x^2} का फोरियर cosine रूपांतरण $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-p^2/4}$ होगा।

Show that Fourier cosine transform of e^{-x^2} is $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-p^2/4}$.

इकाई / Unit-II

3. (*a*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सतत् फलन रीमान समाकलनीय होता है।

Show that every continuous function is Riemann integrable.

(*b*) यदि $f \in R[a, b]$, तब सिद्ध कीजिए कि $|f| \in R[a, b]$ और $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$।

If $f \in R[a, b]$, then prove that $|f| \in R[a, b]$ and $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

अथवा / OR

4. (*a*) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

Test for the convergence of $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$.

(*b*) $\int_a^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x^2} dx$ के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए जहाँ $a > 0$।

Test the convergence for the function $\int_a^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x^2} dx$ where $a > 0$.

इकाई / Unit-III

5. (*a*) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = |z|^2$ सर्वत्र सतत् है, किन्तु मूल बिन्दु पर छोड़कर किसी भी z के लिए अवकलनीय नहीं है।

Prove that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous everywhere but nowhere differentiable for z except at the origin.

(*b*) दर्शाइए कि फलन $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ विश्लेषिक है।

Show that the function $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ is analytic.

अथवा / OR

6. (*a*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक मोबियस रूपान्तरण वृत्त को वृत्तों में प्रतिचित्रित करता है।

Prove that every Mobius transformation maps circle into circles.

(*b*) द्विघात रूपान्तरण w के स्थिर बिंदु को ज्ञात कीजिए :

$$w = \frac{3z-4}{z-1}$$

Find the fixed point of the quadratic transform w:

$$w = \frac{3z-4}{z-1}$$

इकाई / Unit-IV

7. (*a*) दर्शाइए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

Show that in a metric space, every closed sphere is a closed set.

(*b*) एक दूरीक समष्टि (X, d) में सिद्ध कीजिए कि

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall \; x, y, z \in X$$

In a metric space (X, d) show that

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall \; x, y, z \in X$$

अथवा / OR

8. (*a*) सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Show that every Cauchy sequence in a metric space is bounded.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Show that $\sqrt{3}$ is an irrational number.

इकाई / Unit-V

9. (*a*) मान लो (X, d) तथा (Y, ζ) दो दूरीक समष्ठियाँ हैं और $f: X \to Y$ एक फलन है । तब सिद्ध कीजिए कि f सतत् है यदि और केवल यदि $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ ।

Let (X, d) and (Y, ζ) be two metric spaces and $f: X \to Y$ be a function. Then prove that f is continuous if and only if $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में दो संहत उप-समुच्चयों का संघ संहत होता है।

Show that the union of two compact subsets of a metric space is compact.

अथवा / OR

10. (*a*) सिद्ध कीजिए कि किसी संबद्ध समुच्चय का सतत् प्रतिबिंब भी संबद्ध होता है।

Show that continuous image of a connected set is connected.

(*b*) बेयर-संवर्ग प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Baire-category theorem.