

गणित (2022) प्रथम प्रश्न-पत्र

इकाई-I

प्रश्न 1. (a) अनुक्रम को परिभाषित कीजिए। दर्शाइये कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

(b) श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए—

$$1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3^2 x^2}{3!} + \frac{4^3 x^3}{4!} + \dots, x > 0.$$

अथवा, (a) एकान्तर श्रेणी को परिभाषित कीजिए। निम्न श्रेणी के लिए निरपेक्षतः तथा प्रतिबन्धी अभिसरण का परीक्षण कीजिए—

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{7.8} + \dots$$

(b) रॉबी परीक्षण का कथन लिखिये। निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \dots, x > 0.$$

इकाई-II

प्रश्न 2. (a) निम्न फलन के लिए बिन्दु  $x=0$  पर सांतत्य एवं अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए—

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(b) एक समान सांतत्य को परिभाषित कीजिए। फलन  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  के लिए अन्तराल  $[2, 4]$  में लैग्रान्ज के माध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

अथवा, (a) सिद्ध कीजिए कि कोई फलन किसी बिन्दु पर अवकलनीय है, तो वह फलन उस बिन्दु पर सतत होता है, परन्तु विलोम सत्य नहीं है।

(b) टेलर का प्रमेय (शेषफल का लैग्रान्ज स्वरूप) को लिखकर सिद्ध कीजिए।

इकाई-III

प्रश्न 3. (a) यदि  $x^x y^y z^z = c$  तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1} \text{ यदि } x = y = z.$$

(b) दो चरों के फलन के लिए सीमा को परिभाषित कीजिए। यदि  $u = \sin^{-1} \left( \frac{x^3 + y^3}{x + y} \right)$  तब सिद्ध कीजिए कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \tan u.$$

अथवा, (a) यदि  $u = \log_e (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$  तब दर्शाइये कि

$$(i) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}, \quad (ii) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = \frac{-9}{(x+y+z)^2}.$$

(b) यदि  $x = r \cos \theta \cos \phi, y = r \cos \theta \sin \phi, z = r \sin \theta$

तब सिद्ध कीजिए कि जैकोबियन  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = -r^2 \cos \theta.$

इकाई-IV

प्रश्न 4. (a) सरल रेखा  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a + a \cos \alpha \log \tan \frac{\alpha}{2}$  के अन्वालोप का समीकरण ज्ञात कीजिये। जहाँ,  $\alpha$  प्राचल है।

(b) फलन  $u = ax^3y^2 - x^4y^2 - 3x^3y^3$  के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ की विवेचना कीजिये।

अथवा, (a) अतिपरवलय  $2xy = a^2$  का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

(b) दिए गए निम्न शर्त के अधीन फलन  $u = x^2 + y^2 + z^2$  का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए—

$$ax + by + cz = p.$$

इकाई-V

प्रश्न 5. (a) गामा फलन को परिभाषित करते हुए सिद्ध कीजिए कि—

$$\Gamma n \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}, 0 < n < 1.$$

(b) मूल्यांकन कीजिए—  $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dx dy.$

अथवा, (a) मूल्यांकन कीजिये—  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dx dy dz.$

(b) मूल्यांकन कीजिये—

(i)  $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$

(ii)  $\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dx dy.$