

AF-3043

B.A. / B.Sc. (Part - II)
Term End Examination, 2017-18

MATHEMATICS

Paper - I

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer all questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होती है।

Prove that every cauchy sequence is bounded.

- (b) सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी निरपेक्षतः अभिसारी है:

$$1 - \frac{1}{22} + \frac{1}{32} - \frac{1}{42} + \dots$$

(2)

Prove that the following series is absolutely convergent :

$$1 - \frac{1}{22} + \frac{1}{32} - \frac{1}{42} + \dots$$

अथवा / OR

- (a) निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

Test the convergent of the following series :

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

- (b) निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{7} + \dots \infty, x > 0$$

Test the convergence of the following series :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{7} + \dots \infty, x > 0$$

(3)

इकाई / Unit-II

2. (a) अवकलन का श्रृंखला नियम लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove chain rule of differentiation.

- (b) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$, R में एकसमान संतत नहीं है।

Prove that $f(x) = x^2$, is not uniformly continuous in R .

अथवा / OR

- (a) मोस्टेस्ट का प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Mostest Theorem.

- (b) प्रथम मध्यमान प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि यदि

$$x > 0, \text{ तो } \log_{10}(1+x) = \frac{x \log_{10} e}{1+\theta x}, \text{ जहाँ}$$

$$0 < \theta < 1$$

By First mean value theorem prove that

$$\text{if } x > 0, \text{ then } \log_{10}(1+x) = \frac{x \log_{10} e}{1+\theta x},$$

$$0 < \theta < 1.$$

(4)

इकाई / Unit-III

3. (a) ϵ - δ तकनीक का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + 2y) = 3$$

By using ϵ - δ technique prove that

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + 2y) = 3$$

- (b) यदि $u = f(y-3, 3-x, x-y)$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

If $u = f(y-3, 3-x, x-y)$, then prove that

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

अथवा / OR

- (a) यदि $x+y+z = u$, $y+z = uv$, $z = uvw$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v$$

(5)

If $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$, then prove that

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v$$

(b) यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{x+y+z}$$

If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{x+y+z}$$

इकाई / Unit-IV

4. (a) उन वृत्तों का एन्वेलप ज्ञात कीजिए जिनके व्यास $y^2 = 4ax$ की ध्रुवांतर रेखाएँ हैं।

Find the envelope of circles whose diameter is radii vector of $y^2 = 4ax$.

(b) फलन $U = \sin x \sin y \sin(x + y)$ का उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

(6)

Find maximum and minimum of function $U = \sin x \sin y \sin(x + y)$.

अथवा / OR

(a) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find evolute of curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

(b) यदि $x + y + z = a$ हो, तो $x^m y^n z^p$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find maximum value of $x^m y^n z^p$ if $x + y + z = a$.

इकाई / Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1} B(m, n)$$

Prove that :

$$\int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1} B(m, n)$$

(b) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\log 2} \int_0^x \int_0^{x+\log y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

(7)

Evaluate :

$$\int_0^{\log 2} \int_0^x \int_0^{x+\log y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

अथवा / OR

- (a) $\iiint_V x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$ जहाँ V निर्देशांकी और समतल $x+y+z=1$ से परिबद्ध संघत प्रदेश है।

Evaluate $\iiint_V x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$ where V is closed region bounded by co-ordinates plane and plane $x+y+z=1$.

- (b) निम्न समाकलन के क्रम का परिवर्तन कीजिए

$$\int_0^{a \cos \alpha} \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2 - x^2}} V dx dy$$

Change order of following integration

$$\int_0^{a \cos \alpha} \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2 - x^2}} V dx dy$$