

AE-1211

B.Sc. (Part - I)
Term End Examination, 2016-17

MATHEMATICS

Paper - I

Algebra and Trigonometry

Time : Three Hours | *Maximum Marks* : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न में कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) दर्शाइए कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स को $P + iQ$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ P तथा Q दोनों हर्मिटीय हैं।

Show that every square matrix can be expressed as $P + iQ$, where P and Q both are Hermitian.

- (b) दर्शाइए कि R^3 का उपसमुच्चय $\{(3,4,-1), (1,2,0), (1,0,-1)\}$ रैखिकतः परतंत्र है।

Show that the subset of R^3 $\{(3,4,-1), (1,2,0), (1,0,-1)\}$ is linearly dependent.

- (c) दर्शाइए कि किसी मैट्रिक्स के भिन्न-भिन्न आइगेन मानों के संगत आइगेन सदिश एकघाततः स्वतंत्र होते हैं।

Show that the eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues of a matrix are linearly independent.

इकाई / Unit-II

2. (a) λ तथा μ के किन मानों के लिए समीकरणों $x+y+z=6$, $x+2y+3z=10$, $x+2y+\lambda z=\mu$ का

- (i) कोई हल नहीं है;
 (ii) एक अद्वितीय हल है;
 (iii) अनंत हल है?

For what values of λ and μ the equations $x+y+z=6$, $x+2y+3z=10$, $x+2y+\lambda z=\mu$ have

- (i) no solution;

(3)

(ii) an unique solution;

(iii) infinite solution ?

(b) यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल α, β, γ हो, तो समीकरण बनाइए जिनके मूल

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\alpha + \gamma}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \text{ हैं।}$$

If α, β, γ are the roots of equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then construct equation whose roots are

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\alpha + \gamma}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta}.$$

(c) डेकार्ट विधि से चतुर्थघाती समीकरण $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ को हल कीजिए।

Using Descartes' Method, solve the biquadratic equation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$.

इकाई / Unit-III

3. (a) यदि R किसी समुच्चय A में तुल्यता संबंध है, तो दर्शाइए कि R^{-1} भी A में तुल्यता संबंध है।

(4)

If R is an equivalence relation in set A , then show that R^{-1} is also an equivalence relation in A .

- (b) दर्शाइए कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q_+ , संक्रिया $*$ के सापेक्ष आबेली ग्रुप बनाता है, जहाँ $a*b = \frac{ab}{2} \forall a, b \in Q_+$.

Show that the set of all positive rational numbers Q_+ , forms an abelian group with operation $*$, where $a*b = \frac{ab}{2} \forall a, b \in Q_+$.

- (c) G एक समूह है, $H \subseteq G$ तब H, G का उपग्रुप होगा यदि और केवल यदि $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, जहाँ b^{-1}, b का प्रतिलोम है। सिद्ध कीजिए।

G is a group, $H \subseteq G$, then H is a subgroup of G if and only if $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, where b^{-1} is a inverse of b . Prove.

इकाई / Unit-IV

4. (a) दर्शाइए कि $a \rightarrow a^{-1}$, G में एक स्वकारिता होगी यदि और केवल यदि G आबेली है।

(5)

Show that $a \rightarrow a^{-1}$ is an automorphism of G if and only if G is abelian.

- (b) यदि $f: \underset{\text{(बलय)}}{R} \rightarrow \underset{\text{(बलय)}}{R'}$ एक समाकारी प्रतिचित्रण है, तब दर्शाइए कि $\ker f$ एक आइडियल होगा।

If $f: \underset{\text{(ring)}}{R} \rightarrow \underset{\text{(ring)}}{R'}$ is a homomorphic mapping, then show that $\ker f$ will be an ideal.

- (c) समिश्र संख्याओं का समुच्चय क्रमित पूर्णाकीय प्रांत नहीं होता। दर्शाइए।

Set of complex numbers is not an ordered integral domain. Show that.

इकाई / Unit-V

5. (a) दर्शाइए कि

$$(a + ib)^{m/n} + (a - ib)^{m/n} =$$

$$2(a^2 + b^2)^{m/2n} \cos\left(\frac{m}{n} \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$$

जहाँ m, n घनात्मक पूर्णांक हैं।

Show that

$$(a+ib)^{m/n} + (a-ib)^{m/n} =$$

$$2(a^2+b^2)^{m/2n} \cos\left(\frac{m}{n} \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$$

where m, n are positive integers.

(b) यदि $\sin(\theta + i\phi) = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, तब दर्शाइए कि

$$(i) \quad \rho^2 = \frac{1}{2} (\cosh 2\phi - \cosh 2\theta)$$

$$(ii) \quad \tan \alpha = \tanh \phi \cdot \tanh \theta$$

If $\sin(\theta + i\phi) = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, then show that

$$(i) \quad \rho^2 = \frac{1}{2} (\cosh 2\phi - \cosh 2\theta)$$

$$(ii) \quad \tan \alpha = \tanh \phi \cdot \tanh \theta$$

(7)

(c) निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

$$c \cos \alpha - \frac{1}{2} c^2 \cos 2\alpha + \frac{c^3}{3} \cos 3\alpha - \dots \infty$$

Find the sum of the following series :

$$c \cos \alpha - \frac{1}{2} c^2 \cos 2\alpha + \frac{c^3}{3} \cos 3\alpha - \dots \infty$$
