AE-1213

B.Sc. (Part - I)
Term End Examination, 2016-17

MATHEMATICS

Paper - III

Vector Analysis and Geometry

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : **सभी** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer **all** questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) यदि $\hat{r}$ इकाई सदिश है, तो दिखाइए कि

$$\hat{r}\times d\hat{r}=\frac{\vec{r}\times d\vec{r}}{r^2}$$

If $\hat{r}$ is unit vector, then show that

$$\hat{r}\times d\hat{r}=\frac{\vec{r}\times d\vec{r}}{r^2}$$

(*b*) यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, तो दिखाइए कि

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\hat{r}}{r^2}$$

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, then show that

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\hat{r}}{r^2}$$

अथवा / OR

(*a*) यदि $\vec{u} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ तथा $\vec{v} = (2t-3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$, तब $\frac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v})$ का मान $t = 1$ पर ज्ञात कीजिए।

If $\vec{u} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ and $\vec{v} = (2t-3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$, then find $\frac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v})$ at $t = 1$.

(*b*) यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, तब दिखाइए कि $\text{div}\, r^n\vec{r} = (n+3)r^n$

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, then show that $\text{div}\, r^n\vec{r} = (n+3)r^n$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) यदि $\vec{a}(t)=t\hat{i}-t^2\hat{j}+(t-1)\hat{k}$ तथा $\vec{b}(t)=2t^2\hat{i}+6t\hat{k}$, तो दिखाइए कि

(*i*) $\int_0^1 \vec{a}.\vec{b}\,dt=\frac{-1}{2}$

(*ii*) $\int_0^1 \vec{a}\times\vec{b}\,dt=\frac{-3}{2}\hat{i}-\frac{13}{6}\hat{j}+\frac{2}{5}\hat{k}$

If $\vec{a}(t)=t\hat{i}-t^2\hat{j}+(t-1)\hat{k}$, $\vec{b}(t)=2t^2\hat{i}+6t\hat{k}$, then show that

(*i*) $\int_0^1 \vec{a}.\vec{b}\,dt=\frac{-1}{2}$

(*ii*) $\int_0^1 \vec{a}\times\vec{b}\,dt=\frac{-3}{2}\hat{i}-\frac{13}{6}\hat{j}+\frac{2}{5}\hat{k}$

(*b*) ग्रीन प्रमेय का उपयोग करते हुए $\int_C (x+2y)\,dx+(y+3x)\,dy$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ C वृत्त $x^2+y^2=1$ है।

Use Green's theorem to evaluate $\int_C (x+2y)\,dx+(y+3x)\,dy$ where C is the circle $x^2+y^2=1$.

अथवा / OR

(*a*) $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{F} = x^2 y^2 \hat{i} + y\hat{j}$ तथा वक्र C, $y^2 = 4x$, xy समतल में (0, 0) से (4, 4) तक है।

Evaluate $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ where $\vec{F} = x^2 y^2 \hat{i} + y\hat{j}$ and curve C is $y^2 = 4x$ in the xy plane from (0, 0) to (4, 4).

(*b*) $\iint_S \left(y^2 z^2 \hat{i} + z^2 x^2 \hat{j} + z^2 y^2 \hat{k}\right).\hat{n}\, dS$ का मान गॉस प्रमेय से ज्ञात कीजिए जहाँ S गोले $x^2+y^2+z^2=1$ का xy समतल के ऊपर का पृष्ठ है।

Evaluate $\iint_S \left(y^2 z^2 \hat{i} + z^2 x^2 \hat{j} + z^2 y^2 \hat{k}\right).\hat{n}\, dS$ by Gauss's theorem where S is the part of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$ above the xy plane.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) शांकव $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the conic $x^2+4xy+y^2-2x+2y-6=0$.

(*b*) किसी शांकव में सिद्ध कीजिए कि दो लंबरूप नाभिगत जीवाओं के व्युत्क्रमों का योग अचर होता है।

In a conic prove that the sum of the reciprocals of two perpendicular focal chords is constant.

अथवा / OR

(*a*) शांकव $x^2 + 2y^2 = 2$ के संनाभि शांकव को ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1,1) से होकर जाता है।

Find the conic confocal with the conic $x^2 + 2y^2 = 2$ which passes through the point (1,1).

(*b*) दिखाइए कि दो शांकव $\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos\theta$ तथा $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$ एक दूसरे को स्पर्श करते हैं यदि

$$l_1^2\left(1 - e_2^2\right) + l_2^2\left(1 - e_1^2\right) = 2l_1l_2\left(1 - e_1e_2\cos\alpha\right)$$

Show that the two conics $\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos\theta$ and $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$ touch one another if

$$l_1^2\left(1 - e_2^2\right) + l_2^2\left(1 - e_1^2\right) = 2l_1l_2\left(1 - e_1e_2\cos\alpha\right)$$

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) दिखाइए कि शंकु $ax^2+by^2+cz^2=0$ तथा $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$ परस्पर व्युत्क्रम शंकु हैं।

Prove that the cones $ax^2+by^2+cz^2=0$ and $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$ are mutually reciprocal.

(*b*) बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्रों $ax^2+by^2+cz^2=1$ तथा $lx+my+nz=p$ को प्रतिच्छेद करता है तथा जिसके जनक x अक्ष के समान्तर हैं।

Find the equation of the cylinder which intersects the curves $ax^2+by^2+cz^2=1$ and $lx+my+nz=p$ and whose generators are parallel to x-axis.

अथवा / OR

(*a*) लंब वृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष मूलबिन्दु है, अक्ष z–अक्ष है तथा अर्धशीर्ष कोण α है।

Find the equation of the right circular cone whose vertex is origin, axis is z-axis and semi-vertical angle is α.

(*b*) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके ÁÙ· ¤ Ú´Ð æ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा वक्र $x^2 + y^2 = 16,\ z = 0$ से होकर जाते हैं।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and passing through the curve $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) शांकवज $5x^2 - 4y^2 + 6z^2 = 25$ के स्पर्श समतल का समीकरण बिन्दु (1, −1, 2) पर ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the tangent plane to the conicoid $5x^2 - 4y^2 + 6z^2 = 25$ at the point $(1, -1, 2)$.

(*b*) परवलयज $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = z$ के बिन्दु (4, 3, 5) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the normal at the point $(4,3,5)$ of the paraboloid $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = z$.

अथवा / OR

(*a*) दिखाइए कि समतल $x + 2y - 2z = 4$ परवलयज $3x^2 + 4y^2 = 24z$ को स्पर्श करता है। स्पर्शिता बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Show that the plane $x + 2y - 2z = 4$ touches the paraboloid $3x^2 + 4y^2 = 24z$. Also find the point of contact.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ का समतल $lx+my+nz = 0$ से प्रतिच्छेद का क्षेत्रफल $\frac{\pi abc}{p}$ है जहाँ p स्पर्श समतल पर केन्द्र से डाले गए लम्ब की लम्बाई है जो दिए गए समतल के समांतर है।

Prove that the area of the section of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ intersected by the plane $lx + my + nz = 0$ is

$$\frac{\pi abc}{p}$$

where p is the length of the perpendicular from centre to the tangent plane which is parallel to the given plane.