



AK-1209

B.A./B.Sc. (Part-III)
Term End Examination, 2022-23

MATHEMATICS

Paper - I

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) डिरिख्ले का परीक्षण लिखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove Dirichlet's test.

221_BSP_(7)

(Turn Over)

(2)

(b) निम्न फलन की फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Find the Fourier series of the following function :

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(c) सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन के लिए $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ परंतु श्वार्ज प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होते

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prove that for following function $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ while the conditions of Schwarz's theorem does not satisfied

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

221_BSP_(7)

(Continued)

इकाई / Unit-II

2. (a) माना $f: [a, b] \rightarrow R$ परिबद्ध फलन है तथा P^* और P अंतराल $[a, b]$ के विभाजन हैं इस प्रकार कि $P \leq P^*$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$U(P^*, f) \leq U(P, f)$$

Let $f: [a, b] \rightarrow R$ be bounded function and P^* and P are partition of $[a, b]$ such that $P \leq P^*$ then prove that

$$U(P^*, f) \leq U(P, f)$$

- (b) ~~परिमित~~ अंतराल में ऐसे परिबद्ध फलन का उदाहरण दीजिए जो रिमान समाकलनीय नहीं है।

Give an example of a bounded function on finite interval which bounded but not Riemann integrable.

- (c) समाकलन $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{a^2 + x^2} dx$ के अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{a^2 + x^2} dx$$

इकाई / Unit-III

3. (a) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = \bar{z}$ कहीं भी विश्लेषिक नहीं है।

Prove that function $f(z) = \bar{z}$ not analytic anywhere.

- (b) उस मोबियस रूपांतरण को ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं $z_1 = 2, z_2 = i$ तथा $z_3 = -2$ को बिन्दुओं $w_1 = 1, w_2 = i$ तथा $w_3 = -1$ में प्रतिचित्रित करता है।

Find the Mobius transformation which maps points $z_1 = 2, z_2 = i$ and $z_3 = -2$ into point $w_1 = 1, w_2 = i$ and $w_3 = -1$ respectively.

(5)

(c) सम्मिश्र फलन $w = f(z)$ के अनुकोणिक होने का पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove sufficient condition for complex function $w = f(z)$ to be conformal.

इकाई / Unit-IV

4. (a) यदि A, B दूरीक समिष्ट (X, d) के दो समुच्चय हैं, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + D(A, B)$$

If A, B are two subsets of metric space (X, d) , then prove that

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + D(A, B)$$

(b) माना A दूरीक समिष्ट (X, d) का उपसमुच्चय है। तब सिद्ध कीजिए \bar{A} संवृत समुच्चय है।

Let A be a subset of metric (X, d) . Then prove that \bar{A} is closed set.

(6)

(c) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{8}$ परिमेय संख्या नहीं है।

Prove that $\sqrt{8}$ is not rational number.

इकाई / Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पृथक्करण दूरीक समिष्ट द्वितीय गणनीय होती है।

Prove that every separable metric space is second countable.

(b) माना $(X, d), (Y, p)$ तथा (Z, σ) तीन दूरीक समिष्टयाँ हैं और $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ संतत फलन है। तब सिद्ध कीजिए कि $g \circ f: X \rightarrow Z$ संतत है।

Let $(X, d), (Y, p)$ and (Z, σ) be the three metric spaces and $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ be continuous then prove that $g \circ f: X \rightarrow Z$ is continuous.

(c) सिद्ध कीजिए कि दूरीक समिष्ट में दो संतत समुच्चयों का संघ एक संतत समुच्चय होता है।

(7)

Prove that in a metric space union of
two compact subset is compact.
