



AF-3044

B.A. / B.Sc. (Part - II)
Term End Examination, 2017-18

MATHEMATICS

Paper - II

Differential Equations

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer **all** questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (a) समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ को घात श्रेणी विधि

से हल कीजिए।

Solve by power series method

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

(2)

(b) बेसल समीकरण $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$ को

हल कीजिए।

Solve the Bessel's equation

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

अथवा / OR

(a) सिद्ध कीजिए कि

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Prove that

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(b) सिद्ध कीजिए कि :

$$(i) \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \cos x$$

$$(ii) \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \sin x$$

Prove that :

$$(i) \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \cos x$$

$$(ii) \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \sin x$$

(3)

इकाई / Unit-II

2. (a) ज्ञात कीजिए :

(i) $L\{\sin at\}$

(ii) $L\{\cos at\}$

Find the value :

(i) $L\{\sin at\}$

(ii) $L\{\cos at\}$

(b) (i) फलन $F(t) = \frac{e^{at} - 1}{a}$ का लाप्लास

रूपान्तरण ज्ञात कीजिए।

Find the Laplace transform of the

function $F(t) = \frac{e^{at} - 1}{a}$.

(ii) ज्ञात कीजिए :

$L(e^{at})$

Find the value :

$L(e^{at})$

अथवा / OR

(a) दर्शाइए कि $\int_0^\infty (\sin x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ लाप्लास

रूपान्तरण का उपयोग करके।

Using Laplace transform to show that

$$\int_0^\infty (\sin x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(4)

(b) संवलन प्रमेय के उपयोग से

$$L^{-1} \left\{ \frac{p}{(p^2 + a^2)^2} \right\} \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

By using convolution theorem, find the

$$\text{value of } L^{-1} \left\{ \frac{p}{(p^2 + a^2)^2} \right\}.$$

इकाई / Unit-III

3. (a) यदि $z = f(x + ay) + \phi(x - ay)$, तो सिद्ध

$$\text{कीजिए कि } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{।}$$

If $z = f(x + ay) + \phi(x - ay)$, then prove

$$\text{that } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

(b) निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Solve the following equation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

अथवा / OR

(5)

(a) पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

$$z(p^2 - q^2) = x - y$$

Find the complete integral of:

$$z(p^2 - q^2) = x - y.$$

(b) निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$x^2p^2 + y^2q^2 = z^2$$

Solve the following equation :

$$x^2p^2 + y^2q^2 = z^2$$

इकाई / Unit-IV

4. (a) निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$(D^2 + 3DD' + 2D'^2)z = x + y$$

Solve the following equation :

$$(D^2 + 3DD' + 2D'^2)z = x + y$$

(b) हल कीजिए :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$$

Solve the equation :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$$

अथवा / OR

(6)

(a) आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए

$$p + r + s = 1$$

Solve the partial differential equation

$$p + r + s = 1$$

(b) निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$$

Solve the following equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$$

इकाई / Unit-V

5. (a) फलनक $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'^2)^{1/2}}{x} dx$ का

उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find the extremal of the following functional

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'^2)^{1/2}}{x} dx.$$

(7)

- (b) दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 36$ तथा बिन्दु $A(1, 0)$ के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ and the point $A(1, 0)$.

अथवा / OR

- (a) वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ तथा सरलरेखा $x + y = 4$ के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the circle $x^2 + y^2 = 1$ and the straight line $x + y = 4$.

- (b) फलनक $I[y(x)] = \int_0^2 (e^{y'} + 3) dx$, $y(0) = 0$

एवं $y(x) = 1$ के चरम के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the extremal for the functional

$$I[y(x)] = \int_0^2 (e^{y'} + 3) dx, \quad y(0) = 0 \quad \text{and}$$

$$y(x) = 1.$$